Dinamika Lubang Hitam Reissner-Nordtsröm Dalam Kosmologi Frieedman-Robertson-Walker (FRW)

[1*)]Muh. Fachrul Latief, [1)]Bansawang BJ., [1)]Wira Bahari Nurdin

[1)]Laboratorium Fisika Teoritik dan Komputasi, Jurusan Fisika, FMIPA
Universitas Hasanuddin
[*)]Email : muh.fachrul73@yahoo.co.id

Abstrak. Model lubang hitam bermuatan (*Reissner-Nordström*) yang berada dalam kosmologi Frieedman-Robertson-Walker (FRW) untuk kasus $\boldsymbol{k = 0}$. Parameter yang dicari adalah bentuk metrik Reissner-Nordström dalam ksomologi FRW dan kesesuaian dengan teorema Birkhoff serta bentuk evolusi semesta terhadap ukuran lubang hitam Reissner-Nordström. Selanjutnya akan ditinjau juga dinamika lubang hitam Reissner-Nordström yang tertanam dalam kosmologi FRW dengan menggunakan persamaan geodesik. Hasil penelusuran secara analitik memberikan bentuk persamaan differensial orde dua non-linear yang menghubungkan antara perubahan $\boldsymbol{u(r)}$ terhadap $\boldsymbol{\phi}$ *(sudut azimuth).*

Kata kunci : Persamaan Medan Einstein, Lubang Hitam Reissner-Nordström, kosmologi FRW, geodesik,

Abstract. Charged black hole model (*Reissner-Nordström*) has been determined in Friedmann-Robertson-Walker's (FRW) cosmology for $k = 0$. The aims in study are to found parameter metric Reissner-Nordström FRW cosmology and compatibility it with Birkhof's theorm and shape the evolution of the universe to size of Reissner-Nordström's black hole. The reviewed dynamics of Reissner-Nordström's black hole embedded in FRW's ccosmology by using equation of geodesic. The analytically result was shown second order of differential equation non-liniear that connect between change of radial $u(r)$ to azimuth angle (ϕ).

Keywords : Einstein field equation, Reissner-Nordström's black hole, FRW's cosmology, geodesic.

I. PENDAHULUAN

Lubang hitam telah diteliti secara mendalam dan detail selama lebih dari empat puluh tahun yang silam sejak lahirnya teori Relativitas Umum yang dipelopori oleh Albert Einsten. Namun, hampir semua penelitian sebelumnya telah difokuskan pada lubang hitam yang terisolasi. Di sisi lain, tidak dapat pula dikesampingkan situasi yang penting dan lebih realistis di mana lubang hitam benar-benar termuat dalam sebuah latar belakang alam semesta. Oleh karena itu, lubang hitam dalam sebuah latar belakang alam semesta merupakan topik yang sangat penting untuk dikaji lebih lanjut.

Perumusan mengenai lubang hitam yang tidak terisolasi dimulai oleh McVittie pada tahun 1933. McVittie menemukan metrik untuk partikel yang bermassa di dalam semesta yang mengembang. Metrik ini memberikan contoh konkrit untuk sebuah lubang hitam Schwarzchild yang termuat dalam semesta Frieedman-Robertson-Walker (FRW), meskipun belum ada gagasan mengenai lubang hitam pada saat itu[7].

Selanjutnya pada tahun 1993, solusi untuk *multi-blackhole* pada latar belakang semesta deSitter ditemukan oleh Kastor dan Traschen [8]. Solusi Kastor-Traschen menggambarkan sistem dinamis lubang hitam dari Reissner-Nordström yang ekstrim di latar belakang semesta deSitter. Metrik ini menggambarkan lubang hitam yang bergerak terhadap satu sama lain yang mengikuti lintasan alam dalam ruang-waktu semesta deSitter. Selanjutnya pada tahun 1999, Shiromizu dan Gen melanjutkan dinamika lubang hitam Reissner-Nordstrom untuk versi yang berputar dalam semesta deSitter [11]. Kemudian pada tahun 2000 oleh K. Nayak dan dkk. mempelajari mengenai lubang hitam Schwarzchild dan Kerr dalam semesta Einsten yang tidak datar [9].

Namun semua keadaan tersebut tidak menggambarkan konsep realitas sekarang bahwasanya alam semesta tersebut mengembang. Di mana dalam semesta deSitter hanya menggambarkan konsep alam semesta yang vakum dan semesta Einsten menggambarkan konsep alam semesta yang stasioner. Oleh karena itu dilakukanlah penelitian oleh Chang Jun Gao dan Shuang Nan Zhang mengenai konsep yang lebih realistis di mana lubang hitam bermuatan yang termuat dalam semesta yang mengembang dan digambarkan melalui metrik Friedman-Robertson-Walker (FRW) [5].

Penelitian yang dilakukan ini merupakan lanjutan penelitian yang dilakukan oleh Chang Jun Gao dan Shuang Nan Zhang mengenai metrik Reissner-Nordstrom dalam semesta FRW. Mereka meninjau gerak orbit planet di dalam medan Reissner-Nordstrom dalam semesta FRW yang dipengaruhi oleh evolusi alam semesta[5]. Namun dalam penelitian ini akan dicari dinamika lubang hitam yang bermuatan dalam kasus yang sama.

II. PENURUNAN METRIK REISSNER-NORDSTRÖM DALAM KOSMOLOGI FRW

Bentuk dari metrik Reissne-Nordstrom diberikan oleh persamaan

$$ds^2 = -\left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}\right)dt^2+\left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta\, d\phi^2) \qquad (1.1)$$

Selanjutnya persamaan (1.1) ditulis ulang ke dalam koordinat bola yang isotropik. Karena dalam kasus kosmologi, seluruh materi dianggap sebagai fluida yang kontinu, homogen dan isotropik. Pernyataan ini membawa kepada kesimpulan bahwa tidak ada pengamat galaksi yang dipandang istimewa di jagad raya ini, termasuk galaksi bima sakti. Dengan kata lain, seluruh pengamat bergerak bersama galaksi dan melihat proses yang berskala besar dan sama dalam evolusi jagad raya[10].

Dengan diasumsikan $x^0 = v$ dan $x^1 = x$ maka variabel transformasinya berdasarkan sistem koordinat koordinat Schwarzchild adalah [5]

$$\tilde{t} = 2v\,; \qquad \tilde{s} = 2l\,;$$
$$2\tilde{r} = x\left(1+\frac{M}{x}\right)^2-\frac{Q^2}{x^2} \qquad (1.2)$$

Sehingga persamaan (1.1) dapat dituliskan kembali ke dalam koordinat bola isotropik, yakni

$$dl^2 = -\frac{\left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}\right)^2}{\left[\left(1+\frac{M}{x}\right)^2-\frac{Q^2}{r^2}\right]^2}dv^2+\left[\left(1+\frac{M}{x}\right)^2-\frac{Q^2}{r^2}\right]^2 \qquad (1.3)$$
$$\left[\left(1+\frac{M}{x}\right)^2-\frac{Q^2}{r^2}\right]^2(dx^2+x^2(d\theta^2+\sin^2\theta\, d\phi^2)$$

Selanjutnya, tinjau persamaan metrik Frieedman-Robertson-Walker (FRW) sebagai semesta yang dianggap stabil untuk dihuni sekarang. Metrik FRW ini merupakan kuantitas fundamental di dalam kosmologi standar. Metrik FRW diberikan oleh persamaan berikut;

$$dl^2 = -dv^2+\frac{a^2(v)}{\left(1+\frac{kx^2}{4}\right)}(dx^2+ x^2(d\theta^2+\sin^2\theta\, d\phi^2)) \qquad (1.4)$$

Di mana $a(v)$ adalah faktor skala dari semesta dan k adalah kurva kelengkungan dari ruang dan waktu. Dengan mempertimbangkan persamaan (1.3) dan (1.4), maka terlihat ada kesamaan dari kedua metrik tersebut. Selanjutnya, diatur agar metrik lubang hitam Reissner-Nordstrom tertanam di dalam semesta FRW dengan mengambil konstanta yang berhubungan antara kedua metrik tersebut.

Misalkan elemen garis baru untuk lubang hitam Reissner-Nordstrom yang tertanam dalam semesta FRW adalah[5]

$$dl^2 = -A^2(v,x)\, dv^2 + B^2(v,x)\, [dx^2 + x^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\ d\phi^2)] \tag{1.5}$$

Hubungan koefisien antara $A(v,x)$ dengan $B(v,x)$ dapat diketahui dengan mencari tensor medan Einsten untuk persamaan (1.5), yakni

$$G_{01} = A(v,x) - f(v)\frac{\dot{B}}{2B} = 0 \tag{1.6}$$

Sedangkan nilai $B(v,x)$ dapat diketahui dengan membandingkan persamaan (1.3) dengan (1.5) yang bentuknya;

$$B(v,x) = \left[w(v,x) + \frac{q(v)}{x}\right]^2 - \frac{s(v)}{x^2} \tag{1.7}$$

Dengan asumsi bahwasanya massa dan muatan terkonsentrasi dalam singularitas. Artinya tidak terdapat ruang yang didistribusikan untuk massa dan muatan tersebut.

Selanjutnya dengan menggunakan persamaan (1.6), maka didapatkan nilai $A(v,x)$, yakni;

$$A(v,x) = \frac{\frac{\dot{w}f}{w} + \frac{(w\dot{q} + \dot{w}q)qf}{w^2x}}{\left(1 + \frac{q}{wx}\right)^2 - \frac{s^2}{w^2x^2}} + \frac{\frac{q\dot{q}f}{w^2x} + \frac{\dot{s}f}{2w^2x^2}}{\left(1 + \frac{q}{wx}\right)^2 - \frac{s^2}{w^2x^2}} \tag{1.8}$$

Untuk kasus waktu dalam kondisi yang konstan $v = konstan$ dan kondisi untuk asimptotik yang datar, maka $A(v\,(konstan), x)$ bias direduksi ke dalam $\sqrt{-g_{00}}$ untuk persamaan (1.3). Dengan demikian, kasus untuk persamaan (1.8) juga bisa direduksi ke dalam $\sqrt{-g_{00}}$ kemudian membandingkannya dengan persamaan metrik FRW pada persamaan (1.4). Sehingga didapatkan relasi di antara koefisien-koefisien tersebut, yakni;

$$\frac{\dot{w}f}{w} = 1; \qquad \frac{(\dot{w}q + w\dot{q})f}{w^2x} = 0$$
$$\frac{q\dot{q}f}{w^2x^2} = -\left(\frac{q}{wx}\right)^2; \qquad \frac{\dot{s}f}{2w^2x^2} = -\frac{s^2}{w^2x^2} \tag{1.9}$$

Maka didapatkan;

$$\dot{w}f = w; \qquad \dot{q}f = -q; \quad \dot{s}f = -2s \tag{1.10}$$

Dari persamaan (1.10) dan konsekuensi dari tereduksi ke dalam $\sqrt{-g_{00}}$ yang dibandingkan terhadap metrik FRW tersebut, maka didapat nilai dari koefisien yang memenuhi, yakni[5];

$$w = \frac{b(v)}{\sqrt{1+\frac{kx^2}{4}}}; \qquad f = \frac{b}{\dot{b}};$$
$$q = \frac{M}{b}; \qquad S = \frac{Q^2}{b^2}; \tag{1.11}$$

di mana M dan Q adalah konstanta integrasi yang berhubungan massa dan muatan dari lubang hitam, sedangkan $b(v)$ adalah fungsi acak yang berhubungan dengan faktor skala semesta.

Dengan mensubtitusi persamaan (1.7), (1.8), dan (1.11) ke dalam persamaan (1.5), maka akan didapatkan hasil akhir dari metrik dari lubang hitam Reissner-Nordstrom dalam latar belakang kosmologi FRW, yakni;

$$dl^2 = -\frac{\left[1 - \frac{M^2}{a^2x^2}\left(1 + \frac{kx^2}{4}\right) + \frac{Q^2}{a^2x^2}\left(1 + \frac{kx^2}{4}\right)\right]^2}{\left[\left(1 + \frac{M}{ax}\sqrt{1 + \frac{kx^2}{4}}\right)^2 - \frac{Q^2}{a^2x^2}\left(1 + \frac{kx^2}{4}\right)\right]^2} dv^2 + \frac{a^2}{\left(1 + \frac{kx^2}{4}\right)^2 \left[\left(1+\frac{M}{ax}\sqrt{1+\frac{kx^2}{4}}\right)^2 - \frac{Q^2}{a^2x^2}\left(1+\frac{kx^2}{4}\right)\right]^2} (dx^2 + x^2[d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2]) \tag{1.12}$$

di mana $a(v) = b(v)^2$ sebagai sebuah variable baru yang berhubungan dengan faktor skala kosmologi FRW yang diturunkan dari persamaan (1.11). Persamaan (1.12) di atas sangat menarik karena ketika $a(v) = konstan$, dan $k = 0$, maka persamaan (1.12) akan kembali ke persamaan metrik Reissner-Nordstrom seperti pada persamaan (1.1).

III. Interpretasi Metrik

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwasanya metrik Reissner-Nordstrom yang berada dalam kosmologi FRW juga memenuhi identitas Bianchi. Artinya,metrik untuk solusi lubang hitam yang stasioner selalu bisa dibawa ke dalam metrik Schwarzchild dalam beberapa keadaan khusus. Namun sebelum itu, perlu dituliskan ulang beberapa persamaan medan

Einsten-Maxwell. Persamaan-persamaan tersebut adalah [3]

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} &= 8\pi\,(T_{\mu\nu} + E_{\mu\nu}) \\ F_{\mu\nu} &= A_{\mu;\nu} - A_{\nu;\mu} \\ F^{\mu\nu}_{;\nu} &= 0 \end{aligned} \tag{1.13}$$

yang di mana $T_{\mu\nu}$ dan $E_{\mu\nu}$ adalah tensor energi memontum untuk fluida ideal dan medan elekromagnet yang didefesnisikan oleh persamaan[3]

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= (\rho + p)U_\mu\, U_\nu + p g_{\mu\nu} \\ E_{\mu\nu} &= \frac{1}{4\pi}\left(F_{\mu\alpha}F^{\alpha}_{\nu} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\right) \end{aligned} \tag{1.14}$$

Di mana ρ dan p adalah kerapatan energi dan tekanan isotropik. U_μ adalah kecepatan-4 oleh partikel. Sedangkan $F_{\mu\nu}$ dan $A_{\mu\nu}$ merupakan tensor kuat medan dan vektor potensial medan elektromagnet [1].

Untuk menghitung tensor Einsten ($G_{\mu\nu}$), maka terlebih dahulu menghitung tensor energi momentum $T_{\mu\nu}$ dan $E_{\mu\nu}$ untuk fluida ideal dan medan elektromagnet. Dengan memasukkan komponen-komponen tensor metrik pada persamaan (3.13) dan komponen $F_{\mu\nu}$ pada persamaan (3.19) ke dalam persamaan (3.17), maka tensor energi momentum $T_{\mu\nu}$ dan $E_{\mu\nu}$ diberikan oleh persamaan [5]

$$T^0_0 = \rho \qquad T^1_1 = T^2_2 = T^3_3 = p$$

$$2\pi E^0_0 = 2\pi E^1_1 = \frac{Q^2\left(1+\frac{kx^2}{4}\right)}{x^4a^2\left[\left(1+\frac{M}{ax}\sqrt{1+\frac{kx^2}{4}}\right)^2 - \frac{Q^2}{a^2x^2}\left(1+\frac{kx^2}{4}\right)\right]^4} \tag{1.15}$$

$$2\pi E^0_0 = 2\pi E^1_1 = -\frac{Q^2\left(1+\frac{kx^2}{4}\right)}{x^4a^2\left[\left(1+\frac{M}{ax}\sqrt{1+\frac{kx^2}{4}}\right)^2 - \frac{Q^2}{a^2x^2}\left(1+\frac{kx^2}{4}\right)\right]^4}$$

Selanjutnya, tensor medan Einsten pada persamaan (1.13) akan dilakukan operasi turunan terhadap salah satu indeks, maka $G^{\mu\nu}_{;\nu} = 0$, maka persamaan Medan Einsten akan menjadi $T^{\mu\nu}_{;\nu} + E^{\mu\nu}_{;\nu} = 0$. Berdasarkan persamaan pada metrik FRW, $T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0$ yang tidak lazim dalam kajian kosmologi sekarang. Selanjutnya ditinjau khusus untuk medan elektromagnet, yakni[5]

$$\begin{aligned} 4\pi E^{\mu\nu}_{;\nu} &= F^{\mu\alpha}F^{\nu}_{\alpha;\nu} + F^{\mu\alpha}_{;\nu}F^{\nu}_{\alpha} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta} \\ &= F^{\mu\alpha}F^{\nu}_{\alpha;\nu} + \frac{1}{2}g^{\mu\rho}F^{\nu\sigma}\left(F_{\rho\sigma;\nu} - F_{\rho\nu;\sigma} - F_{\sigma\nu;\rho}\right) \\ &= -F^{\mu\alpha}J_\alpha = 0 \end{aligned} \tag{1.16}$$

Jadi dari persamaan (1.16) dapat dijelaskan bahwasanya $T_{\mu\nu}$ dan $E_{\mu\nu}$ mengikuti identitas Bianchi. Oleh sebab itu, metrik yang diberikan oleh persamaan (1.12) merupakan solusi eksak dari persamaan Einsten-Maxwell [3].

IV. PROPERTI LUBANG HITAM

Pada bagian ini akan ditunjukkan bagaimana dua parameter M dan Q yang saling terkait dengan massa dan muatan dari lubang hitam, yang diasumsikan bahwasanya evolusi alam semesta jauh lebih lambat sehingga dapat digunakan aproksimasi dari keadaan ruang-waktu yang stasioner. Maka akan didapatkan persamaan massa dan muatan lubang hitam yang terkait dengan evolusi semesta [10]. Hubungan tersebut diberikan oleh persamaan berikut;

$$\begin{aligned} M_0 &\equiv -\frac{1}{8\pi}\int_S \epsilon_{abcd}\nabla^c\xi^d = \frac{M}{a} \\ Q_0 &\equiv -\frac{1}{8\pi}\int_S \epsilon_{abcd}F^{cd} = \frac{Q}{a} \end{aligned} \tag{1.17}$$

Selanjutnya akan ditinjau dua permukaan dari lubang hitam yang berada dalam sistem koordinat kosmik. Kita mendapatkan radius dari permukaan rupa waktu (time-like) [10] adalah;

$$r_{TLS} = \sqrt{\frac{M^2}{a^2} - \frac{Q^2}{a^2}} \tag{1.18}$$

Dan turunan waktu dari radius cakrawala peristiwa [10] adalah

$$\dot{r}_{EH} = \pm\frac{1 - \frac{M^2}{a^2{r^2}_{EH}} + \frac{Q^2}{a^2{r^2}_{EH}}}{a\left[\left(1 + \frac{M^2}{a^2{r^2}_{EH}}\right)^2 - \frac{Q^2}{a^2{r^2}_{EH}}\right]^2} \tag{1.19}$$

Di mana tanda "$+$" dan "$-$" koresponding terhadap diperluas dan diperpendeknya evolusi alam semesta. Jadi untuk cakrawala peristiwa dalam keadaan permukaan rupa- waktu, maka akan didapat $\dot{r}_{EH} < 0$ untuk semesta yang diperluas dan untuk $\dot{r}_{EH} > 0$ untuk semesta yang diperpendek [13].

Esensi dari persamaan (1.18) dan (1.19) untuk menjelaskan bahwasanya skala tipikal lubang hitam ini berhubungan erat dengan evolusi alam semesta. Permukaan rupa-waktu dan jarak cakrawala peristiwa akan menghilang begitu saja seiring dengan diperluasnya alam semesata. Sebaliknya, permukaan rupa-waktu dan jarak cakrawala peristiwa akan diperluas seiring dengan memendeknya alam semesata. Untuk keadaan yang asimptotik, maka faktor skala semestanya $(a = 1)$ dan $\dot{r}_{EH} = 0$, maka akan ditemukan dua macam permukaan secara bersamaan [13], yakni;

$$r_{TLS} = r_{EH} = \sqrt{M^2 - Q^2} \tag{1.20}$$

dengan membandingkan persamaan (1.20) dan (1.18), maka akan ditemukan lubang hitam yang berada dalam semesta yang mengembang dengan massa $M_0 = M/a$ dan muatan $Q_0 = Q/a$. Di mana keduanya saling bergantung pada skala semesta dan tidak konstan.

V. HASIL DAN PEMBAHASAN

Untuk mendapatkan dinamika lubang hitam Reissner-Nordstrom dalam kosmologi FRW, maka perlu menuliskan kembali metrik yang bersangkutan seperti pada persamaan (1.12). Untuk kasus kosmologi yang mengembang, maka akan diambil konstanta kelengkungan $(k = 0)$, sesuai data pengukuran arus yang dilakukan oleh *Microwave Background Radiation (MBR)* menunjukkan bahwasanya alam semesta yang luas akan nampak seperti ruang datar[12]. Maka persamaan (1.12) dapat direduksi ke dalam persamaan;

$$dl^2 = -\frac{\left[1 - \frac{M^2}{a^2x^2} + \frac{Q^2}{a^2x^2}\right]^2}{\left[\left(1 + \frac{M}{ax}\right)^2 - \frac{Q^2}{a^2x^2}\right]^2} dv^2 + a^2\left[\left(1 + \frac{M}{ax}\right)^2 - \frac{Q^2}{a^2x^2}\right]^2 (dx^2 + x^2 d\theta^2 + x^2 \sin^2\theta \, d\phi^2) \tag{1.20}$$

Untuk mendapatkan persamaan gerak lubang hitam bermuatan, maka perlu dituliskan kembali persamaan (1.20) ke dalam sistem koordinat kosmik (Schwarzchild) seperti hal yang dilakukan pada persamaan (1.2). Maka dari itu, variabel transformasi yang memenuhi persamaan tersebut adalah [5]

$$T = 2v \qquad s = 2l$$
$$2r = ax\left(1 + \frac{M}{ax}\right)^2 - \frac{Q^2}{a^2x^2} \tag{1.21}$$

Maka persamaan (1.20) akan menjadi

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - H^2r^2\right)dT^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - H^2r^2\right)^{-1} dr^2 - 2Hr\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - H^2r^2\right)dT\,dr + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2) \tag{1.22}$$

di mana $H \equiv \frac{1}{a}\frac{da}{dT}$ yang merupakan parameter Hubble. Parameter Hubble mendeskripsikan seberapa besarnya pengembangan semesta tersebut. Di mana untuk keadaan

Sistem koordinat (T, r, θ, ϕ) pada persamaan (1.22) adalah tidak orthogonal. Oleh karena itu, koefisien $(dT\,dr)$ dapat dihilangkan dengan mengganti sebuah koordinat waktu yang baru (t). Pengaturan koordinat waktu yang baru diberikan oleh transformasi berikut [5]

$$dt = F(T,r)dT + F(T,r)Hr\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - H^2r^2\right)^{-1} dr \tag{1.23}$$

Maka elemen garis dari persamaan (1.22) akan menjadi

$$ds^2 = -F^2\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - H^2r^2\right)dt^2 + F^2\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - H^2r^2\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2) \tag{1.24}$$

Dengan F merupakan faktor diferensial total dari koordinat waktu yang baru. Untuk konstanta F dan H masing-masing merupakan fungsi dari t dan r. Dalam hal ini, dipilih nilai $F(T,r) = 1$. Jika diandaikan lubang hitam itu berada dalam keadaan vakum, maka kerapatan energi dan tekanannya akan menjadi nol ($p = \rho = 0$). Dengan demikian, nilai untuk parameter Hubble juga akan sama nol ($H = 0$). Sehingga persamaan (6) akan kembali ke solusi lubang hitam Reissner Nordstrom yang statik. Selain itu, jika $\frac{2M}{r} \to 0$ dan $\frac{Q^2}{r^2} \to 0$, maka persamaan (6) akan mempresentasikan solusi kosmologi FRW dalam sistem koordinat solar. Sedangkan untuk kasus kosmologi de Sitter, maka H merupakan sebuah konstanta.

Selanjutnya, akan dicari dinamika lubang hitam bermuatan di bawah pengaruh medan elektromagnet untuk semesta yang mengembang, maka kita tinjau persamaan geodesik ruang-waktu yang dapat diturunkan dari persamaan Lagrangian. Persamaannya diberikan oleh[4]

$$2\mathcal{L} = \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - H^2r^2\right)\dot{t}^2 - \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - H^2r^2\right)^{-1}\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\,\dot{\phi}^2 + \frac{2qQ}{r}\dot{t} \tag{1.25}$$

di mana $\frac{2qQ}{r}\dot{t}$ merupanak bentuk interaksi medan elektromagnet.

Dengan menurunkan persamaan (1.25), maka akan didapatkan dinamika lubang hitam bermuatan dalam kosmologi FRW, yakni

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{M}{L^2} - \frac{Q^2}{L^2}(1+q^2)u + 3Mu^2 - 2Q^2u^3 - \frac{H^2}{L^2u^3} \tag{1.26}$$

Dengan;

$\frac{M}{L^2} + 3Mu^2$ **:** sebagai akibat dari efek relativitas umum di mana massa melengkungkan geometri dari lubang hitam yang tertanam dalam sebuah semesta.

$-\frac{Q^2}{L^2}(1+q^2)u - 2Q^2u^3$ **:** efek muatan listrik dari lubang hitam. Hal inilah yang membuat muatan itu terus terdistribusi dari pusat muatan gravitasi ke seluruh horizon lubang hitam tersebut.

$-\frac{H^2}{L^2u^3}$ **:** sebagai efek dari kosmik yang mengalami ekspansi.

VI. UCAPAN TERIMA KASIH

Penulis mengucapkan banyak terima kasih kepada Bapak Bansawang BJ, M.Si dan Prof. Dr.rer-nat Wira Bahari Nurdin telah bersedia meluangkan waktunya untuk berdiskusi dan membimbing saya sehingga penelitian ini bisa terselesaikan. Selain itu, ucapan terima kasih juga kepada teman-teman komunitas meja kotak yang menjadi teman diskusi intensif sehingga terlahir ide-ide yang membangun penelitian ini.

Referense

1) Anugraha, Rinto. 2011. *Teori Relativitas dan Kosmologi*. Fisika UGM; Yogyakarta
2) BJ, Bansawang. 2006. *Metrik Medan Gravitasi Benda bermuatan Listrik Simetri Bola.* http://repository.unhas.ac.id/handle/123456789/8446.
3) Carmeli, Moshe. 1982. *Classical Field Theory*. John Wiley & Sons; Israel
4) Chandrasekhar, S. 1983. *The Mathematical Theory of Balck Holes.*Oxford University Press; New York.
5) Gao, C. J. dan Zhang, S. N. 2004. Phys. Lett. B Vol. 595 issue 1-4.
6) Gautama, Sunkar Eka. 2014. *Tinjauan Inflasi Alam Semesta Berdasarkan model Lambda-Cold Dark Matter (ΛCDM).* http://repository.unhas.ac.id/handle/123456789/10970 .
7) G. C. McVittie. 1933. Mon. Not. R. Astron. Soc. D 47 5401.
8) Kastor, D. dan Traschen, J. 1993. Phys. Rev. D 47 5401.

9) Nayak, K. R., MacCallum M. A. H., dan Vishveshara, C. V. 2000. Phys. Rev. D 63 024020
10) Purwanto, Agus. 2009. Pengantar Kosmologi. ITS Press; Surabaya.
11) Shiromizu, T. dan Gen, U. 2000. Class. Quantum. Grav. 171361
12) S. Hanany, et al., Astrophys. J. 545 (2000) L5
13) Wald, R. M. 1984. *General Relativity*. University Of Chicago Press; London.